פתרונות מלאים

אלגברה 1מ' -104016-
בוחן אמצע סמסטר, חורף תשס"ט

4/1/09

שאלה מס. 1 (20 נקודות)

יהיו a, b ו - c מספרים ממשיים. מצא את הפתרון הכללי של המערכת הבאה:

$$\begin{cases} x + ay + bz = 0 \\ cx + (ac+1)y + bcz = 1 \end{cases}$$

פתרון שאלה 1:

נבנה מטריצת מקדמים מורחבת ונדרג.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ c & ac+1 & bc & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - cR_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - aR_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & b & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + bz = -a \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a - bz \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (-a - bz, 1, z) = z(-b, 0, 1) + (-a, 1, 0)$$

הערה: אין הכרח להוציא סקלרים בפתרון הכללי.

שאלה מס. 2 (20 נקודות)

א. יהי V מרחב כל המטריצות המרוכבות מסדר 2×2 מעל השדה $\mathbb{R}$.
יהי $K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{C},\ a^2+b^2=0\right\}$. האם K הוא תת-מרחב של V ?
אם כן, הוכח ואם לא אז הבא דוגמא נגדית.

ב. יהי $P_8[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 8 עם מקדמים ממשיים. מצא בסיס ל - $P_8[x]$ בו כל האיברים הם פולינומים ממעלה זוגית.

פתרון שאלה 2:

א. הקבוצה איננה תת מרחב של V. נראה שאין סגירות לחיבור:

$$A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix},\ i^2+1^2=0 \qquad \Rightarrow\ A\in K$$

$$B=\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix},\ (-i)^2+1^2=0 \ \Rightarrow\ B\in K$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ 0^2+2^2=4\neq 0 \ \Rightarrow\ A+B\notin K$$

ב. מאחר ו- $\dim(P_8[x])=9$ עלינו למצוא 9 פולינומים ממעלה זוגית ובלתי תלויים. נסתכל על הקואורדינאטות של פולינום כלשהו ב- $P_8[x]$: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_8x^8$, ונבנה מטריצה 9×9 מדורגת מדרגה 9 (שתבטיח שמימד הקבוצה הפורשת הוא 9) ובו כל הפולינומים ממעלה זוגית, למשל כולם ממעלה 8):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{9\times 9}$$

המטריצה מדורגת ללא שורות אפסים ולכן השורות בלתי תלויות ליניארית.
הפולינומים שאלו הן הקואורדינאטות שלהם יהוו בסיס מתאים:

$$\left\{1+x^8\ ,\ x+x^8\ ,\ x^2+x^8\ ,\ x^3+x^8\ ,\ x^4+x^8\ ,\ x^5+x^8\ ,\ x^6+x^8\ ,\ x^7+x^8\ ,\ x^8\right\}$$

שאלה 3 (15 נקודות)

מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^{17} = \bar{z}$.

פתרון שאלה 3:

$$z^{17} = \overline{z}$$

$$z = rcis\theta \quad \Rightarrow \quad z^{17} = r^{17}cis17\theta \ , \ \overline{z} = rcis(-\theta)$$

$$r^{17}cis17\theta = rcis(-\theta) \quad \Rightarrow \quad (1)\ \ r^{17} = r \ \ , \ \ (2)\ 17\theta = -\theta + 360k$$

$$(1)\ \ r^{17} = r \quad \Rightarrow \quad r = 0,\ or\ \ r = 1$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = 0$$

$$r = 1 \quad \Rightarrow$$

$$(2)\ 17\theta = -\theta + 360k$$

$$18\theta = 360k$$

$$\theta = \frac{360}{18}k = 20k \quad , \quad k = 0,1,2,3,...17$$

$$z_{k+1} = cis20k^{\circ} \quad , \quad k = 0,1,2,3,...17$$

אני אחסוך מעצמי את הצבת ה- k-ים השונים....

שימו לב כי באינדקס הפתרונות כתוב z_{k+1} וזאת משום ש k מתחיל מ- 0 ואילו אני סימנתי $z_0 = 0$ ולכן הפתרון הבא הוא z_1 כלומר $k+1$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א. תהיינה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -6 & x \end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

מצא את כל הערכים של x ב - $\mathbb{R}$ עבורם מרחב השורות של A שווה למרחב השורות של B^t.

ב. יהי n מספר טבעי, ויהיו $b_1, b_2, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
חשב את מכפלת המטריצות C כאשר

$$C = \begin{pmatrix} a_1, & \cdots & , a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

במטריצה $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ יש n שורות.

ג. יהי $n \geq 4$. הוכח ששורות המטריצה $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1, & \cdots & , a_n \end{pmatrix}$ תלויות לינארית.

פתרון שאלה 4:

א. כדי שמרחבי השורות יהיו זהים נדרוש שהשורות השונות מ- 0 בצורות הקנוניות של A ושל B^t יהיו זהות. מאחר ובמטריצה B^t יש רק שתי שורות, כדאי להתחיל קודם ב- B^t :

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ -3 & -6 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & x+9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x+9 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 \to R_3 - (x+9)R_2 \\ R_1 \to R_1 - 3R_2}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו כי השורות השונות מ- 0 בשתי המטריצות הקנוניות זהות ללא תלות ב- x ולכן מרחבי השורות של A ושל B^t שווים לכל x ממשי.

ב. לפני שכופלים את המטריצות חשוב לוודא כי הכפל אכן מוגדר ומהו סדר התוצאה כלומר מה הסדר של המטריצה C:

$$C=\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}}_{1\times n}\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}_{n\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2\times 1}}_{n\times 1}}_{1\times 1}$$

כלומר המטריצה C היא מטריצה מסדר 1×1.

עתה, נבצע את הכפל ונזכור כי מאסוציאטיביות הכפל ניתן לכפול קודם את שתי המטריצות הימניות ואז לכפול משמאל במטריצה השמאלית:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_2 \end{pmatrix}=\left(a_1b_2+a_2b_2+\ldots+a_nb_2\right)_{1\times 1}$$

ג. גם הפעם, לפני שנכפול את המטריצות נוודא כי הכפל אכן מוגדר ומהו סדר התוצאה:

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}}_{n\times 2}\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}}_{1\times n}}_{2\times n}}_{n\times n}$$

כלומר המטריצה המתקבלת היא מסדר $n\times n$.

עתה, נבצע את הכפל ונבחר לכפול קודם את שתי השמאליות ואז נכפול מימין עם המטריצה הימנית:

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי כל השורות הן כפולה של $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ בסקלר b_2 ולכן השורות תלויות ליניארית.

אפשרות נוספת: נדרג את המטריצה שהתקבלה:

$$\begin{pmatrix} b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_j\to R_j-R_1 \\ j=2,3,\dots,n}]{}\begin{pmatrix} b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

מאחר וכל השורות התאפסו פרט לאחת הרי שכל השורות תלויות ליניארית בשורה הראשונה.

שאלה 5 (20 נקודות)

הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

א. יהי V מרחב וקטורי ממימד 5 מעל $\mathbb{R}$ ויהיו u_1, u_2, v_1, v_2 וקטורים ב - V השונים מ - 0. אם $Sp\{u_1, u_2\} = Sp\{v_1, v_2\}$ אז $Sp\{u_1, v_2\} = Sp\{u_2, v_1\}$.

ב. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $v_1, \ldots, v_k$ וקטורים בלתי תלויים לינארית ב - V, $k \geq 1$, יהי $0 \neq w$ וקטור ב - V.
אז קיים j, $1 \leq j \leq k-1$ כך ש - $Sp\{w, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_k\} = Sp\{v_1, \ldots, v_k\}$.

ג. אם A היא מטריצה ממשית ריבועית לא סמטרית, כך ש - A ו - A^t תלויות לינארית אז A^t היא אנטי-סימטרית.

פתרון שאלה 5:

א. הטענה איננה נכונה:

נביא דוגמא נגדית: נתון כי $\dim V = 5$ לכן נבחר $V = \mathbb{R}^5$.

נבחר את הוקטורים באופן הבא:

$$u_1 = (1,0,0,0,0) \quad , \quad u_2 = (0,1,0,0,0)$$
$$v_1 = (1,1,0,0,0) \quad , \quad v_2 = (1,0,0,0,0)$$
$$sp\{u_1, u_2\} = sp\{v_1, v_2\} = \{(a,b,0,0,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$
$$sp\{u_1, v_2\} = \{(a,0,0,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$sp\{v_1, u_2\} = \{(c,d,0,0,0) \mid c,d \in \mathbb{R}\}$$
$$sp\{u_1, v_2\} \neq sp\{v_1, u_2\}$$

ב. הטענה איננה נכונה:

נבחר $V = R^3$.

נבחר את הוקטורים באופן הבא:

$$v_1 = (1,0,0) \ , \ v_2 = (0,1,0) \ , \ w = (0,0,1)$$

אז v_1, v_2 הם בלתי תלויים ליניארית, ובנוסף:

$$sp\{v_1, v_2\} = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \neq sp\{v_1, w\} = \{(c,0,d) \mid c,d \in \mathbb{R}\}$$

נשים לב שגם $sp\{v_1, v_2\} = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \neq sp\{w, v_2\} = \{(0,c,d) \mid c,d \in \mathbb{R}\}$ אבל

השאלה מבקשת להחליף איזשהו וקטור שהוא איננו הווקטור האחרון, שכן נתון כי $1 \leq j \leq k-1$

לכן אין צורך להוסיף זאת להסבר.

הערה: שימו לב כי לו היה נתון **גם** ש- $\dim V = k$ הרי שאז מאחר ו- $\{v_1,...,v_k\}$ הם k וקטורים בלתי תלויים ב- V, כלומר בסיס, ומאחר ונתון כי $w \neq 0$ הרי שאז היה נובע כי הטענה נכונה, ואני משאירה לכם להשלים את הנימוק.

ג. (שאלת שיעורי הבית) הטענה נכונה.

נתון ש- A ריבועית ולא סימטרית, וכן נתון כי המטריצות A ו- A^t תלויות ליניארית. נוכיח כי המטריצה A היא אנטי סימטרית (שימו לב כי מהנתון ש- A היא **לא** סימטרית לא נובע כי A היא **אנטי**-סימטרית....)

נתון ש- A היא לא סימטרית לכן בהכרח $A \neq 0$ שכן מטריצת האפס היא סימטרית, וכן המטריצה $A^t \neq 0$. לפי משפט, שני וקטורים u,v שונים מאפס הם תלויים ליניארית אם״ם הם פרופורציונאליים כלומר אם״ם קיים סקלר $\alpha \neq 0$ כך ש- $u = \alpha v$. מאחר ובמקרה שלנו $u = A$, $v = A^t$ שונים מאפס, הרי קיים סקלר $\alpha \neq 0$ כך ש- $A = \alpha A^t$. נבצע מוחלפת לשני האגפים (כלומר נשחלף את שני האגפים) ונקבל:

$$(A)^t = \left(\alpha A^t\right)^t$$
$$A^t = \alpha A$$

נציב בשיוויון האחרון $A = \alpha A^t$ ונקבל:

$$A^t = \alpha\left(\alpha A^t\right) = \alpha^2 A^t$$
$$\alpha^2 A^t - A^t = 0$$
$$A^t(\alpha^2 - 1) = 0$$

קיבלנו כי מטריצה כפול סקלר שווה ל- 0. מאחר והמטריצה איננה מטריצת ה- 0 (נתון) הרי שבהכרח הסקלר הוא 0 כלומר: $\alpha^2 - 1 = 0$ או $\alpha = \pm 1$.

אם $\alpha = 1$ הרי שאז $A = \alpha A^t = A^t$ כלומר A מטריצה סימטרית בסתירה לנתון ולכן בהכרח $\alpha = -1$ ומקבלים $A = \alpha A^t = -A^t$, כלומר A אנטי-סימטרית כנדרש.